

Van mechanische banen naar toevalsprocessen, chaos en turbulentie

Johannes B.J. van Zeijts, G. Reinout W. Quispel, Theo P. Valkering en Robert H.G. Helleman

Opwindende en vèr strekkende ontdekkingen zijn onlangs gedaan in de niet-lineaire dynamica van dissipatieve en conservatieve systemen^[1-11]. Uit de recente explosie van numeriek, theoretisch en experimenteel werk blijkt dat de meeste niet-lineaire systemen een overgang vertonen van 'regelmatig' naar 'chaotisch' gedrag: Vele van de regelmatige, voorspelbare, banen van een mechanisch systeem, bij voorbeeld, gaan bij bepaalde parameterwaarden over in een (praktisch) onvoorspelbaar toevalsproces! Dit alles heeft al belangrijke nieuwe theoretische en experimentele bijdragen geleverd aan ons begrip van turbulentie in dissipatieve systemen en van thermodynamisch ('ergodisch') gedrag in conservatieve systemen. In dit artikel introduceren we heuristisch een zeer algemeen en elegant model, de 'periodeverdubbelende overgang naar chaos'. Het kwantificeert de toenemende ingewikkeldheid van de mechanische banen, als we een bepaalde parameter C (energie, getal van Reynolds enz.) laten toenemen. Het voorspelt een eindige kritische waarde C_{cr} waarbij (/waarna) de spectrale 'ruis'-intensiteit van de banen enorm gaat toenemen. Hieruit volgt dat onvoorspelbaar, chaotisch, gedrag al optreedt zonder dat de niet-lineariteit oneindig groot hoeft te zijn. De in dit model optredende nieuwe fundamentele (Feigenbaum-)constanten blijken universeel van toepassing te zijn op de meeste niet-lineaire systemen. Experimenteel zijn deze voorspellingen al bevestigd in de quantum-optica, mechanica, akoestiek, elektronica, scheikunde, biologie en hydrodynamica^[1]. Ze worden tevens bevestigd door computersimulaties van vele andere niet-lineaire problemen die experimenteel nog niet getest zijn. Theoretisch is het zeer opmerkelijk dat we toevalsprocessen verkrijgen als oplossingen van causale, deterministische, bewegingsvergelijkingen^[1-4].

Periodeverdubbelende overgang naar chaos

We introduceren hier het simpelste en meest populaire nieuwe idee uit de recente niet-lineaire dynamica, de 'periodeverdubbelende overgang naar chaos' (Feigenbaum)^[1-6]. Dit model verschaft een scenario voor de overgang van eenvoudig voorspelbare banen naar toevalsprocessen. Het pretendeert 'universeel' van toepassing te zijn op de meeste dissipatieve niet-lineaire systemen. Met behulp van numerieke plaatjes van de banen geven we een voorbeeld in dit hoofdstuk. Experimentele successen van dit scenario, bij voorbeeld in turbulentie-onderzoek, worden besproken in het volgende hoofdstuk. We eindigen dit inleidende artikel met een eenvoudige theoretische verklaring van deze verschijnselen.

Dr. R.H.G. Helleman en dr. ir. Th.P. Valkering, leden van de wetenschappelijke staf, ir. J.B.J. van Zeijts, assistent onderzoeker, en dr. G.R.W. Quispel zijn verbonden aan het Centrum voor Theoretische Fysica van de TH Twente.

Meer details van de besproken experimenten en theorieën alsmede verdere referenties zijn te vinden in ref. 1.

Vreemde Aantrekkers

Hoewel de preciese vorm van de in ons voorbeeld gebruikte niet-lineaire vergelijkingen onbelangrijk is als we universele effecten willen vinden, geven we ze voor de volledigheid:

$$dx/dt = -y - z,$$

$$dy/dt = x + gy,$$

$$dz/dt = f + xz - Cx. \quad (1)$$

De banen van dergelijke (anti-)dissipatieve systemen vertonen 'transients' (inslingerverschijnselen), maar naderen uiteindelijk allemaal willekeurig dicht tot een bepaald(e) stationair(e) baan/punt^[2-4]. Deze stationaire banen worden daarom 'aantrekkers' genoemd. Experimenteel, en numeriek, zijn ze uiteraard eenvoudig te vinden. Transiënts en 'afstotende' banen (\equiv aantrekkers voor

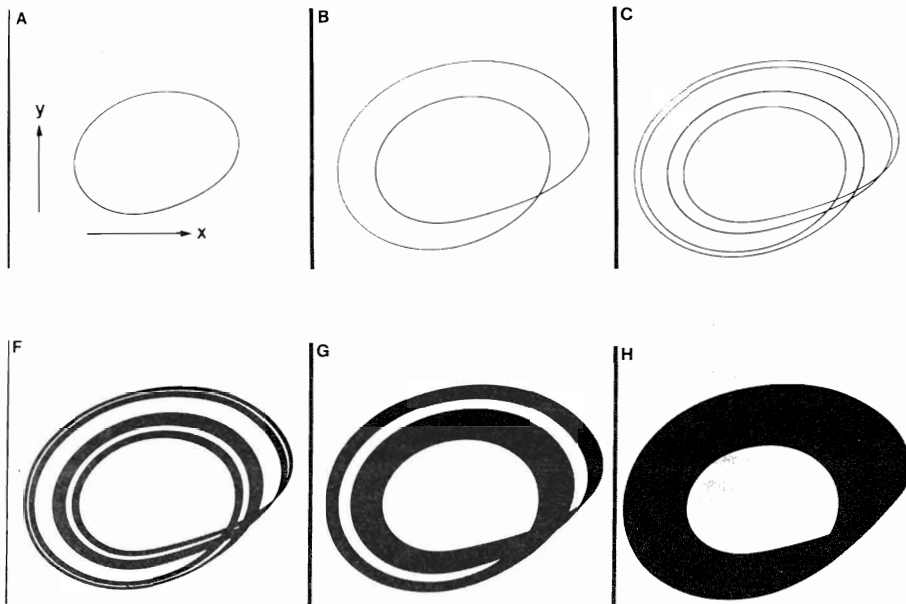


Fig. 1. 'Periodeverdubbende aantrekkers' van een niet-lineair systeem (1), geprojecteerd op het x, y -vlak (de echte banen snijden elkaar dus niet). Bij (6) opeenvolgende waarden van het 'Reynoldsgetal'. C in (1), zien we de ingewikkeldheid van de aantrekker exponentieel snel toenemen. De 'vreemde aantrekkers' in (H), (G) en (F) staan model voor turbulentie in thermische convectie^[1, 2, 4, 5]. De kritische waarde C_{cr} wordt ergens tussen (C) en (F) bereikt. (Ontleend aan Crutchfield, Farmer et al.^[1, 2, 5].) De snijpunten met de y -as, als functie van C , zijn getekend in fig. 2.

$t \rightarrow -\infty$) daarentegen worden *niet* getekend in de plaatjes omdat ze, experimenteel en numeriek, onstabiel zijn en dus slechts korte tijd zichtbaar zijn. Ter vereenvoudiging van de plaatjes laten we het $z(t)$ -deel uit de oplossingen van (1) weg en projecteren de banen dus op het x, y -vlak. Het niet-lineaire systeem (1) heeft een simpele *periodieke aantrekker* ('limit cycle') voor zekere waarden van de parameters f, g en C ; zie fig. 1A^[1, 2, 5]. Verhogen we ons 'Reynoldsgetal' C , dan slaat deze aantrekker om in een afstoter (dus niet getekend). Tegelijkertijd wordt een nieuwe periodieke aantrekker geboren met *twee* dergelijke lussen, om de oude baan heen, zie fig. 1B. De nieuwe aantrekker heeft dan ook de *dubbele periode* van de vorige. Bij een iets hogere C -waarde herhaalt alles zich. De periodieke aantrekker met twee lussen slaat om in een afstoter (niet getekend) en om ieder van de twee lussen heen worden wederom twee nieuwe lussen geboren, zie fig. 1C. De nieuwe aantrekker heeft een *vier* maal zo grote periode (dan die voor één lus). Verhogen we C verder, dan herhaalt alles zich tot er een *oneindig* aantal (2^∞) lussen is, bij een (eindige!) kritische waarde C_{cr} . Boven C_{cr} lijken alle lussen tot een soort *band* (streng, kluwen) samengewonden te worden. Bij C_{cr} slaat ook de oneindige lange (2^∞) baan zelf weer om in een afstoter. Deze afstoting is echter *slechts* beperkt tot een kleine

omgeving van de baan. Om die omgeving (band) heen blijft de oude aantrekking overheersen. We krijgen zo een wel zeer vreemde aantrekker^[3, 4, 2], een *globaal-aantrekkende band*, waarbinnen een oneindig lange *lokaal-afstotende* baan. De meeste andere banen binnen de band gedragen zich te allen tijde *chaotisch* ten gevolge van herhaalde ontmoetingen met de oneindige lange afstoter. Vandaar dat we in fig. 1H, ruim boven C_{cr} , een 'zwarte' band zien en geen individuele banen. Een 'vreemde aantrekker' is een aantrekkelijk model voor *turbulentie*^[3, 4, 2]. Hoe verschillend men ook de begintoestanden kiest, alle banen gaan in dit model altijd naar dezelfde chaotische eindtoestand. Experimenteel ziet men dat hoe verschillend ook iedere keer witte melk in zwarte koffie geroerd wordt, het eindprodukt altijd dezelfde chaotisch gemengde bruine vloeistof is.

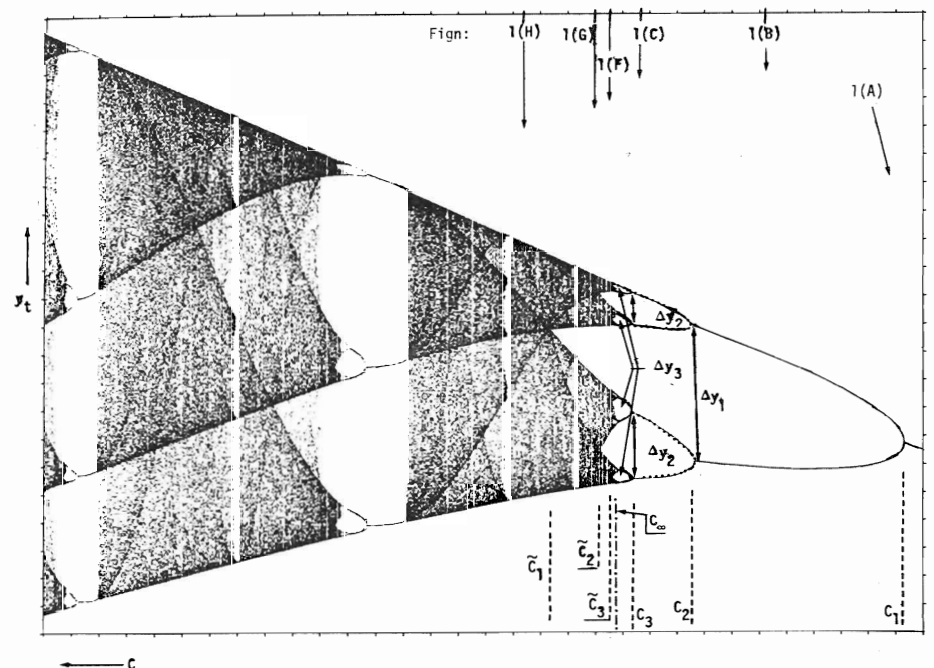
Als we C ten slotte *verlagen*, terug in de richting van C_{cr} , vinden we dat onze 'vreemde aantrekker' zich splitst in een *dunnere band met twee lussen*, zie fig. 1G. Nog dichter bij C_{cr} splitst ook deze vreemde aantrekker zich wederom, in een nog *dunnere band met vier lussen*, zie fig. 1F. Dit alles herhaalt zich tot er, bij C_{cr} , een oneindig dunne 'band' is, met oneindig veel (2^∞) lussen, die alleen nog maar de eerder vermelde oneindig lange baan bevat.

Wellicht het meest verrassende aspect van dit scenario voor de overgang naar chaos, weergegeven in fig. 1, is dat het *universeel* van toepassing is op dissipatieve niet-lineaire systemen^[1]. In het laatste hoofdstuk gaan we daar kort op in. Het is echter in het algemeen onbekend voor welke *andere* parameterwaarden (b.v. van f, g in (1)) men deze overgang aantreft^[1]. Dit universele scenario produceert ook kwantitatieve voorspellingen, waarvan we er nu twee bespreken.

Universele Feigenbaum

Om te tonen hoe deze periodeverdubbelingen veranderen met ons 'Reynoldsgetal' C , laten we ook het $x(t)$ -deel van

Fig. 2. Periodeverdubbende 'Feigenbaum'. De snijpunten, $y_i (i = 0, 1, 2, 3 \dots)$, van de aantrekkende banen uit (1) en fig. 1, met de y -as, zijn verticaal uitgezet. Ons Reynolds-getal, de parameter C in (1), is uitgezet langs de horizontale as, in omgekeerde richting: De C neemt toe naar *links*. Transients en afstoters zijn, net als in fig. 1, niet getekend. Ook de chaotische banen in de 'zwarte' banden vertegenwoordigen dus het stationaire gedrag van het niet-lineaire systeem. (Ontleend aan het D1-verslag van P. van Keulen, THT). Faseplaatjes van de banen, geprojecteerd op het x, y -vlak, zijn getekend in fig. 1. De universele Feigenbaum-constanten δ (2) en α (3) zijn beter te herkennen in fig. 6, waarin de assen van de Feigenbaum uit fig. 5 logaritmic zijn uitgezet.



de oplossingen van (1) weg: Alleen de y -waarden waarop banen in fig. 1 de y -as snijden (met $dx/dt > 0$), worden nu nog gebruikt. Dit reduceert de gehele fig. 1A tot slechts één snijpunt ($x = 0, y \equiv y_1$) en fig. 1B tot twee snijpunten ($x = 0, y \equiv y_1$) en ($x = 0, y \equiv y_2$). We zetten zulke snijpunten y_i ($i = 0, 1, 2, 3 \dots$) in grafiek uit tegen de parameter C in fig. 2 (N.B. de C neemt toe naar links!). We zien dat de parameterwaarden C_k waarbij de periodeverdubbelingen plaatsvinden (bij C_1 de eerste, enz.), erg snel convergeren naar het kritische punt $C_{cr} \equiv C_\infty$. Bekijken we de numerieke waarden van de C_k 's precieser, dan vinden we zelfs dat deze reeks (asymptotisch) meetkundig convergeert volgens:

$$C_k \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} C_\infty + a\delta^{-k}, \quad \delta = 4,66920\dots, \quad (2)$$

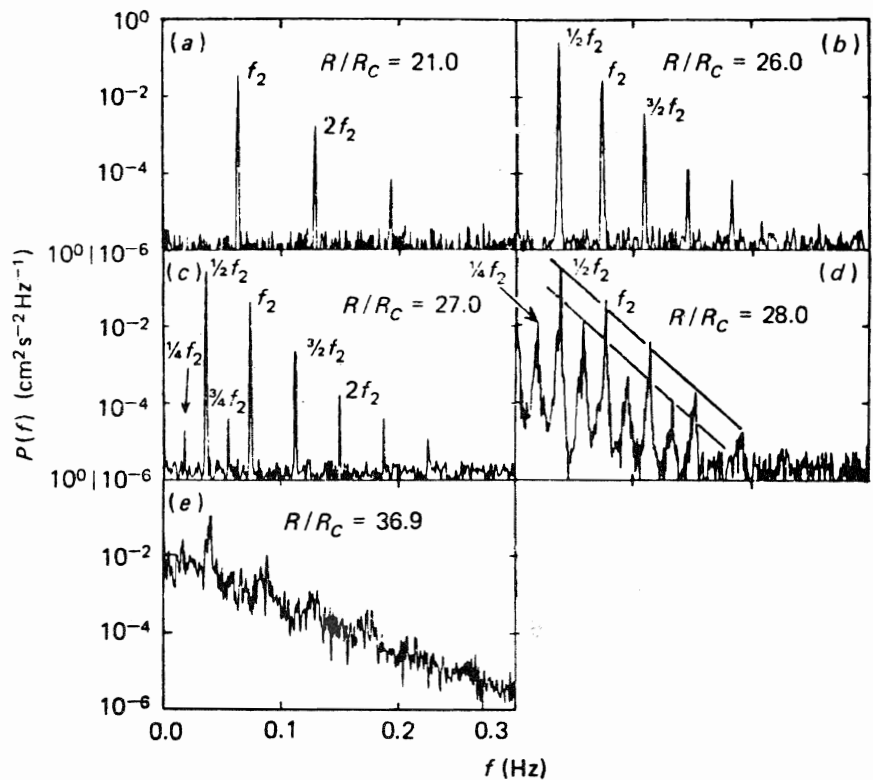
met $a < 0$. Deze δ is een van de universele Feigenbaumconstanten^[1, 4, 5, 6, 2] die experimenteel in tal van systemen gemeten is^[1]. Twee experimenten worden in het volgende hoofdstuk besproken. Fig. 2 met zijn vele vertakkingen ('bifurcaties') en chaotisch 'loof' wordt ook wel een 'bifurcatieboom', of 'Feigenbaum', genoemd, naar een van de ontdekkers^[1]. Bekijken we precieser de numerieke afstanden tussen de takken (bij opeenvolgende bifurcatiepunten), in fig. 2 aangeduid met $\Delta y_1, \Delta y_2, \Delta y_3, \dots$, dan vinden we dat ook deze reeks weer (asymptotisch) meetkundig (naar nul) convergeert. Dit is nu echter een machtreeks in een tweede universele Feigenbaum-constante α :

$$\Delta y_k \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} b\alpha^{-k}, \quad \alpha = -2,5029\dots \quad (3)$$

(Uit de preciese definitie van α volgt het minteken^[5, 4, 1, 2]). Dus, als we, in fig. 2, de verticale schaal van de $(k + 1)$ ste bifurcatie met α vermenigvuldigen en de horizontale schaal met δ , verkrijgen we de grafiek van de vorige, k -de, bifurcatie (k voldoende groot). Deze gelijkvormigheid ('self-similarity') wordt verklaard door de eenvoudige renormeringstheorie van het laatste hoofdstuk. De nieuwe constante α is een tweede universele Feigenbaum-constante^[1, 4, 5, 6, 2] die experimenteel gevonden wordt^[1]. Ook de parameterwaarden \tilde{C}_k waarbij de chaotische banden zich in tweeën splitsen (zie fig. 2), convergeren met dezelfde δ volgens (2) (maar met $a > 0$). De dikten van de chaotische banden, bij deze \tilde{C}_k 's, convergeren eveneens met dezelfde α volgens (3).

Experimenteel koken

We bespreken hier de experimentele overgang naar chaos in een rechthoekige pan met water die van onderen verwarmd wordt. Het warme water rijst in 92



het midden naar de oppervlakte, koelt af en zinkt aan de zijkanten weer naar beneden. Deze 'Rayleigh-Bénard'-instabiliteit veroorzaakt zo een stationaire rolbeweging evenwijdig aan de lange wand. Het is de eerste instabiliteit bij de overgang naar koken. Het getal van Rayleigh R is per definitie evenredig met het temperatuurverschil tussen onder- en bovenkant van de pan, en is een maat voor de niet-lineariteit van de bijbehorende vergelijkingen^[1]. Het heeft hier de zelfde functie als de parameter C elders in dit artikel. Verhogen we R en wachten we tot alle transiënts verdwenen zijn, dan vinden we een tweede stationaire instabiliteit. Hierbij golft de waterrol, als een slang in de modder. De rolsnelheid is nu dus gemoduleerd met een bepaalde (golf-) frequentie f_2 . De periode van deze golfbeweging verdubbelt als we R verhogen. Metingen worden gedaan door laserlicht te verstrooien aan een waterrol. De frequentie van het verstrooide licht vertoont daardoor een (Doppler-)verschuiving. Uit het (zwevings)verschil met de oorspronkelijke frequentie wordt dan de rolsnelheid van het water berekend. Bekijken we de 'spectrale intensiteit' (een Fourier-analyse) van deze rolsnelheid, dan vinden we in fig. 3a een zeer scherpe (delta-) piek bij de golffrequentie f_2 (en hogere harmonischen, $2f_2, 3f_2, \dots$, ten gevolge van de niet-lineariteit). Verhogen we R weer, dan zien we de eerste periodeverdubbeling als een extra piek bij $\frac{1}{2}f_2$ (en harmonischen, $\frac{3}{2}f_2, \frac{5}{2}f_2, \dots$) in fig. 3b. Voor een iets hogere waarde van R , in fig. 3c, vinden we het extra piekje bij $\frac{1}{4}f_2$ (en harmonische, $\frac{3}{4}f_2$) van de tweede

Fig. 3. Experimentele periodeverdubbelingen zichtbaar in de spectrale intensiteit $P(f)$ van de rolsnelheid van water (70°C) in een kookexperiment (Rayleigh-Bénard). Horizontaal is de frequentie uitgezet. Bij opeenvolgende waarden van het getal van Rayleigh (R) vinden we dat de simpele periodieke aantrekker, met frequentie f_2 in (a), extra pieken ontwikkelt bij $\frac{1}{2}f_2$ in (b), en bij $\frac{1}{4}f_2$ in (c), ten gevolge van de periodeverdubbelingen. Een (rose) ruisspectrum, verschijnt, in (e), bij grotere waarden van R . Dit concentreert zich, in (d), als ruisschermen om de vorige pieken, wanneer we R verlagen. De kritische waarde ($R_{cr} \equiv R_\infty$) wordt ergens tussen (c) en (d) bereikt. (Ontleend aan Gollub, Benson en Steinman, zie ref. 2.) Deze experimentele resultaten zijn geheel in overeenstemming met de numerieke, in fig. 1 en 2, en de theoretische, weergegeven in fig. 4 en 5.

periodeverdubbeling. Dit alles correspondeert met de eerder besproken verdubbelingen uit fig. 1A-C. In andere experimenten met nog minder instrumentele ruis vindt men zelfs de eerste vier periodeverdubbelingen, en daaruit een benaderde waarde $\delta \approx 4,4$ ^[1] voor de universele Feigenbaum-constante (2). Dit is al aardig in de buurt ($\pm 5\%$) van de numeriek voorspelde asymptotische waarde (2), na een groot aantal verdubbelingen. Ruim boven de laatste R -waarde (uit fig. 3c) meet men een 'continu' ruisspectrum (rose ruis) dat een factor 10^4 hoger ligt (bij $f \approx 0$) dan de instrumentele ruis, zie fig. 3e! Dit correspondeert met het chaotisch gedrag binnen de zwarte band van onze vreemde aantrekker uit fig. 1H. En inderdaad, als we daarna R verlagen, zien we ruis(modulatie)-banden, in fig. 3d, om de frequenties $\frac{1}{4}f_2, \frac{1}{2}f_2, f_2$ (en harmonischen) heen. Dit correspondeert met het chaotisch gedrag binnen de dunnere zwarte band met vier lussen uit fig. 1F. In fig. 3d is ook de afstand geschat tussen de amplitudes van de $\frac{1}{2}f_2$ - en de

$\frac{1}{4}f_2$ -ruisband (en hun harmonischen, via de evenwijdige lijnen). Een theoretische waarde voor deze afstand kan uiteraard berekend worden uit de tweede universele Feigenbaum-constante α (3), die de relatieve amplitudes van de bifurcerende banen voorspelt (na een groot aantal verdubbelingen). De experimentele schattingen vertonen al een redelijke overeenstemming ($\pm 10\%$) met die asymptotische theoretische waarde^[1]. Elektronisch kan men zich van dit alles wel zeer snel en gemakkelijk overtuigen door een LRC-resonantiecircuit te maken met een varactor (een capaciteit C die een niet-lineaire functie is van de aangelegde spanning). Bezit men een oscilloscoop, dan kunnen de experimentele versies van zowel fig. 1 als fig. 2 direct op het scherm getoond worden. Bezit men een spectraalanalysator, dan kan ook fig. 3 vertoond worden. Voor details van deze en andere experimenten zie hoofdst. 2 van ref. 1.

Een kwadratisch model

Het simpelst denkbare niet-lineaire (gladde) model bestaat uit een kwadratische vergelijking met één variabele (4). We zullen hier zien dat dit eenvoudige model al een kwantitatieve beschrijving geeft van bijna alle besproken experimentele en numerieke periodeverdubbelingen. Dit is ook één van de redenen voor de universaliteit van de Feigenbaum: Ongeacht welke niet-lineaire vergelijkingen eigenlijk de experimenten beschrijven, ze kunnen (lokaal althans) vrijwel overal benaderd worden door kwadratische (Taylor-)termen^[5]. We zien dus dat een kwadratisch model vrijwel overal van toepassing is. We vinden hier een *exacte* oplossing van de

banen in dit model bij een van de meest chaotische parameterwaarden uit de Feigenbaum. Voor *alle* parameterwaarden geven we een eenvoudige theoretische benadering. Hieruit volgen ook analytische formules, (20) en (21), voor de universele Feigenbaum-constanten δ (2) en α (3).

Eerder in dit artikel moesten we alle variabelen van het niet-lineaire systeem (1) als functie van de tijd berekenen, via het nodige numerieke werk. Toch gebruikten we maar één van die variabelen voor de Feigenbaum in fig. 2, en dan ook nog met tussenpauzes y_t ($t = 0, 1, 2, 3 \dots$)! We hebben eigenlijk dus slechts een ééndimensionale afbeelding nodig, van de y -as op zich zelf: $y_t \rightarrow y_{t+1}$. Daarom kiezen we als model de kwadratische afbeelding:

$$y_{t+1} = 2Cy_t + 2y_t^2, \quad t = 0, 1, 2, 3 \dots (4)$$

Een baan, y_1, y_2, y_3, \dots , wordt verkregen door deze éénstaps verschilvergelijking (4) te itereren. We controleren eerst numeriek dat (4) dezelfde verschijnselen vertoont als eerder besproken, en tekenen het stationaire gedrag van de huidige y_t 's als functie van de parameter C . Dit levert een grafiek, in fig. 4, die vrijwel identiek is aan de vorige Feigenbaum, van de niet-lineaire differentiaalvergelijkingen (1); vergelijk fig. 2. De huidige banen, van (4), zijn echter numeriek veel sneller en precieser te vinden. Daardoor kunnen we nu gemakkelijk elf periodeverdubbelingen volgen; zie fig. 5. In deze dubbellogaritmische grafiek is de meetkundige convergentie van de bifurcatiepunten (2) en van de banen (3) zeer duidelijk te zien.

Een exacte chaotische oplossing

De chaotische banen van de Feigenbaum in fig. 4, en (4), zijn het grootst bij $C = -1$. We kennen daar toevallig de exacte oplossing van de chaotische band:

$$y_t = \frac{1}{2} + \cos(2\pi\theta_t), \quad C = -1, \quad (5)$$

$$\theta_t = (2^t\theta_0), \text{ modulo } 1, \quad 0 \leq \theta_t < 1, \quad (6)$$

zoals blijkt uit substitutie in (4) (en de formule voor $\cos 2\alpha$). De waarde van θ_0 volgt uit de beginwaarde y_0 . De simpele uitdrukkingen (5), (6) lijken wellicht nog niet erg chaotisch. Volgens (6) voldoet de hoek θ_t echter aan de triviale afbeelding

$$\theta_{t+1} = (2\theta_t), \text{ modulo } 1. \quad (7)$$

Door de modulorekening zijn de θ_t niet omkeerbaar in de tijd: Bij één gegeven θ_1 -waarde (bijv. 0,4) horen twee verschillende θ_0 -waarden (0,2 en 0,7). Zo zijn er ook in het algemeen 2^t verschillende beginwaarden θ_0 die allemaal tot dezelfde θ_t leiden. Laten we $t \rightarrow \infty$, dan vallen deze 2^∞ verschillende beginwaarden willekeurig dicht bij ieder punt van het interval $[0,1)$. Dit volgt uit (7) en de binaire representatie van θ_t ^[1]. Hieruit moge allereerst blijken dat de meeste θ_t -waarden een *zeer chaotisch verleden* hebben. Hun toekomst lijkt echter nog steeds gemakkelijk voorspelbaar uit de deterministische bewegingsvergelijking (7). In de praktijk is ook dit niet waar, aangezien de beginwaarde θ_0 slechts een eindige precisie heeft: Voor het gemak bekijken we eerst een decimaal analogon van (7):

$$\phi_{t+1} = (10\phi_t), \text{ modulo } 1. \quad (8)$$

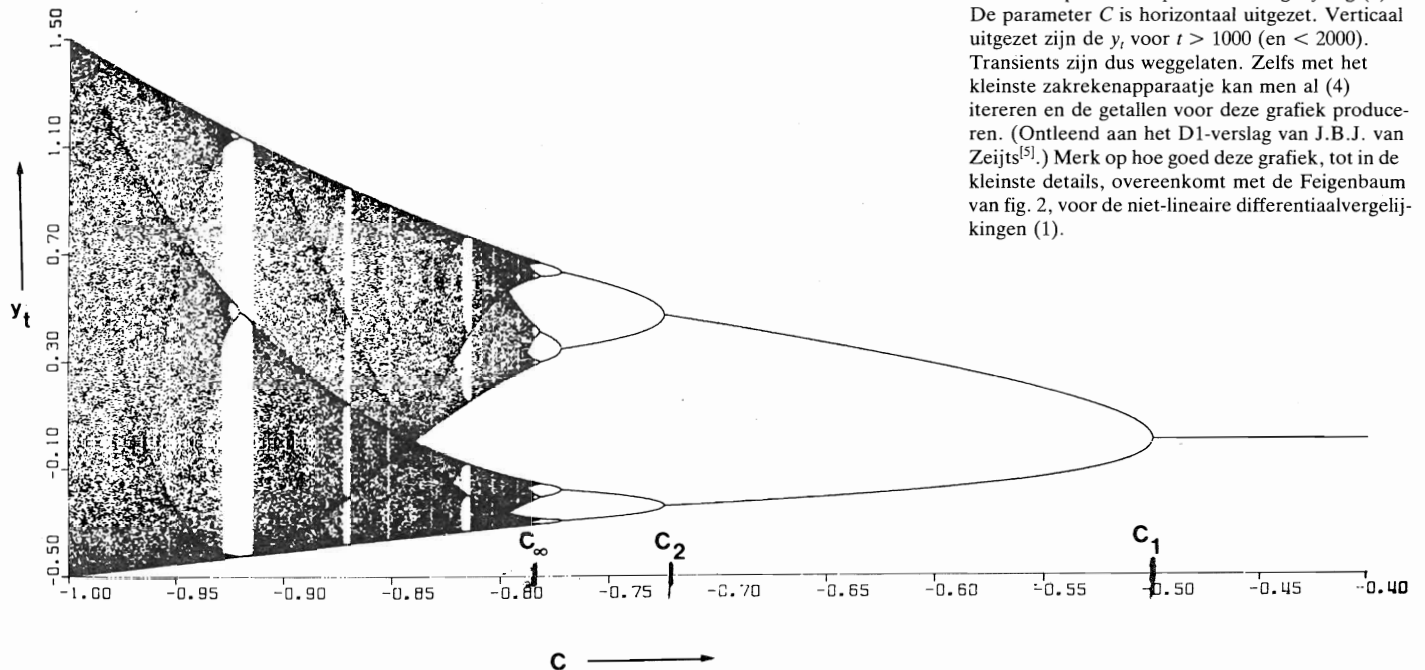


Fig. 4. Een periodeverdubbelende Feigenbaum van de simpele éénstaps verschilvergelijking (4). De parameter C is horizontaal uitgezet. Verticaal uitgezet zijn de y_t voor $t > 1000$ (en < 2000). Transients zijn dus weggelaten. Zelfs met het kleinste zakrekenapparaatje kan men al (4) itereren en de getallen voor deze grafiek produceren. (Ontleend aan het D1-verslag van J.B.J. van Zeijts^[5].) Merk op hoe goed deze grafiek, tot in de kleinste details, overeenkomt met de Feigenbaum van fig. 2, voor de niet-lineaire differentiaalvergelijkingen (1).

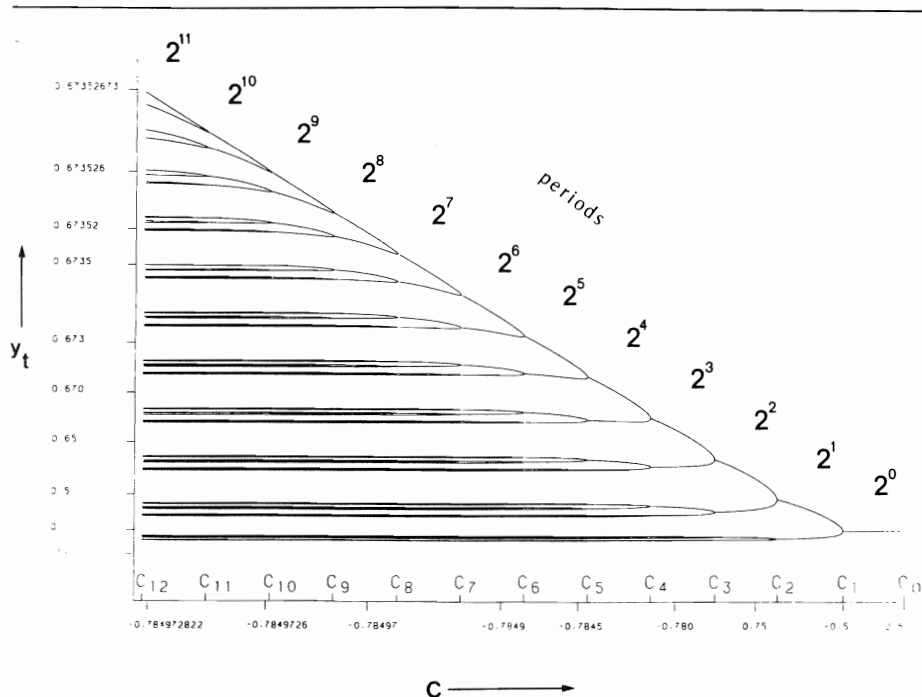


Fig. 5. De eerste 12 periodeverdubbende aantrekkers van (4), uit fig. 4. Verticaal is de y_t uitgezet (logaritmisch) en horizontaal de C (logaritmisch). (Ontleend aan het D1-verslag van J.B.J. van Zeijts^[5, 21].) Merk op dat de bifurcatiepunten $C_1, C_2, C_3, \dots, C_{11}$ een constante onderlinge afstand ($\log \delta$) hebben in deze logaritmische grafiek, in overeenstemming met (2). Ook de afstand tussen de bifurcatietakken ($\Delta y_1, \dots, \Delta y_{11}$) is een constante ($\log \alpha$) in deze dubbellogaritmische grafiek, in overeenstemming met (3).

In de (experimentele of numerieke) praktijk kennen we slechts een eindig aantal decimalen van de beginwaarde, bij voorbeeld $\phi_0 = 0,79583 \dots \pm 10^{-5}$. Uit (8) volgt dan

$$\begin{aligned} \phi_0 &= 0,79583 \dots \pm 10^{-5}, \\ \phi_1 &= 0,9583 \dots \pm 10^{-4}, \\ \phi_2 &= 0,583 \dots \pm 10^{-3}, \\ \phi_3 &= 0,83 \dots \pm 10^{-2}, \\ \phi_4 &= 0,3 \dots \pm 10^{-1}, \\ \phi_5 &= 0, \dots \pm 1. \end{aligned} \quad (9)$$

Bij iedere iteratie van (8) verliezen we dus een decimaal precisie. Al na vijf iteraties zien we alleen nog maar de oorspronkelijke (experimentele of numerieke) afrondingsfouten uit ϕ_0 . In de praktijk kunnen we de toekomst dus maar voor zeer korte tijd voorspellen. Dit snelle geheugenverlies is essentieel voor chaotisch gedrag. Het ontstaat doordat de constanten in (8) en (7) (absoluut) groter dan 1 zijn en staat bekend als 'gevoelige afhankelijkheid van de beginvoorwaarden'^[3, 21]. Uit het voorbeeld (9) blijkt ook dat de decimale representatie van ϕ_t gelijk is aan die van ϕ_0 , maar zonder de eerste t cijfers. De ϕ_t 's als functie van t (neem b.v. het eerste cijfer na de komma) hebben dus dezelfde waarschijnlijkheidsverdeling als de cijfers in ϕ_0 . Volgens de getaltheorie is dat een constante (toevens)verdeling, voor de meeste (irrationale) waarden van ϕ_0 . De meeste oplossingen

$\{\phi_t\}$ hebben dus ook een volmaakte toevensverdeling. Vervangen we alle decimale representaties van getallen door binaire representaties, dan zien we dat ook de meeste exacte oplossingen θ_t van (7), (6) en y_t van (5) een volmaakte toevensverdeling hebben. Ten overvloedige zij vermeldt dat de autocorrelatiefunctie van de expliciete y_t -oplossing (5), (6) analytisch berekend kan worden en een (Kronecker-)deltafunctie oplevert^[1]. De spectrale intensiteit is dus vrijwel gelijk aan die van 'witte ruis'.

In dit voorbeeld, bij $C = -1$, leidt de deterministische bewegingsvergelijking (4) dus tot het toevalsproces (5) (6). We zien ook dat bijna alle beginvoorwaarden leiden tot dezelfde toevensverdeling. Dit komt overeen met de eerder besproken turbulentie en met het mengen van melk en koffie.

We kennen exacte oplossingen helaas slechts voor enkele C -waarden. De hele Feigenbaum-structuur, bij alle C -waarden gaan we nu bestuderen met behulp van een renormalisatiemethode.

Renormalisatiebenadering van Feigenbäume

Eerst berekenen we de exacte periode-1 en -2-banen van onze kwadratische afbeelding (4), en het eerste bifurcatiepunt C_1 . Daarna passen we de afbeelding tweemaal toe (\equiv nieuwe afbeelding) en kiezen we de tijdseenheid ook tweemaal zo groot. De berekende periode-2-baan van (4) wordt dus een periode-1-baan van de nieuwe afbeelding. De Taylor-expansie van de nieuwe afbeelding, om deze baan heen, begint uiteraard met een lineaire en een kwadratische term. Vervolgens verwaarlozen we de hogere-ordetermen en vinden dat de nieuwe afbeelding (15) identiek is^[5] aan de oude

(4), maar met een andere parameterwaarde, C' . Deze nieuwe C' is een kwadratische functie (17) van de oude C : $C' = C'(C)$. De 'nieuwe' afbeelding zelf heeft dus ook weer een periodeverdubbeling, bij $C' = C_1$. Dit levert de kwadratische vergelijking $C'(C_2) = C_1$ waaruit we C_2 (2) kunnen oplossen, en zo voorts (18). Deze kwadratische 'renormalisatie' van C_k op C_{k+1} (18) geeft ons dan analytische benaderingen voor C_∞ (19) en voor de universele constanten δ (20) en α (21).

Een triviale periode-1-oplossing van onze afbeelding (4) is $y_0 = 0 = y_1 = y_2 = \dots$. De periode-2-oplossing is

$$\hat{y}_{2t} = a + b, \quad \hat{y}_{2t+1} = a - b,$$

met (10)

$$4a \equiv -1 - 2C, \quad 4b^2 \equiv (C + 1/2)(C - 3/2),$$

zie (4)^[5, 21]. Deze periode-2-baan bestaat alleen reëel voor $C < -1/2$ (of $> 3/2$).

Voor $C = -1/2$ valt deze baan samen met de periode-1-baan. Het eerste bifurcatiepunt is dus

$$C_1 = -1/2. \quad (11)$$

Introduceren we de afstand tot de periode-2-baan als nieuwe variabele, $\Delta y_t \equiv y_t - \hat{y}_t$, dan wordt onze afbeelding (4):

$$\Delta y_{t+1} = (2C + 4\hat{y}_t)\Delta y_t + 2\Delta y_t^2. \quad (12)$$

We passen deze afbeelding tweemaal toe en vinden na wat simpele algebra, de nieuwe afbeelding:

$$\Delta y_{t+2} = d\Delta y_t + 2(e + d^2)\Delta y_t^2 + \text{hogere ordes}, \quad (13)$$

$$d \equiv 2C + 4\hat{y}_{2t}, \quad e \equiv 2C + 4\hat{y}_{2t+1}. \quad (14)$$

Dicht bij de periode-2-baan is Δy klein. We verwaarlozen dus de hogere ordes en herschrijven (13) als:

$$y'_s + 1 = 2C'y'_s + 2y_s'^2, \quad (15)$$

met

$$y'_s \equiv (e + d^2)\Delta y_{2s}, \quad (16)$$

$$C' \equiv \frac{1}{2}de = -2C^2 + 2C + 2, \quad (17)$$

vergelijk (14), (10). De nieuwe afbeelding (15) is identiek aan de oude (4), maar met gerenormaliseerde parameter C' , tijdseenheid ($2s = t$) en lengte-eenheid (16). Ook de nieuwe afbeelding (15) heeft een periode-2-(in s)baan, die ontstaat bij $C' = C_1$. Dit is een periode-4-(in t)baan van de oude afbeelding (4), die per definitie ontstaat bij $C = C_2$ (2). Substitueren we $C_1 = -1/2$ (11) links in

(17) dan kunnen we rechts C_2 oplossen, $C_2 = 1/2(1 - \sqrt{6})$ (we gebruiken slechts één van de wortels^[5, 2]). Substitueren we deze C_2 dan vinden we C_3 , en zo voorts. De bifurcatiepunten voldoen dus aan

$$C_{k-1} = -2C_k^2 + 2C_k + 2. \quad (18)$$

Aangezien deze C_k 's convergeren, vgl. (20), (2), verkrijgen we uit (18) direct de waarde van het kritische punt;

$$C_x = \frac{1}{4}(1 - \sqrt{17}), \quad (19)$$

een relatieve fout van slechts 0,06% (vergeleken met het numerieke resultaat^[2, 5]). De eerder besproken meetkundige reeks (2), in de universele δ , voldoet inderdaad aan (18), mits

$$\delta = -4C_x + 2 = 1 + \sqrt{17} \approx 5,12, \quad (20)$$

een relatieve fout van 9,7% vergeleken met (2). Nog betere benaderingen vereisen meer algebra^[6]. Het belang van onze *analytische* formules is dat ze eenvoudig genoeg zijn om deze en andere verschijnselen te verklaren en/of te voorspellen^[5, 2, 6, 11]. De tweede universele Feigenbaum-constante α (3), die de afstand Δy tussen de bifurcatietakken herschaalt, kan direct uit (16) worden afgelezen:

$$\alpha = e + d^2 \approx -2,24, \quad (21)$$

vgl. (14), (10), (19). Deze voorspelde waarde van α heeft een relatieve fout van 10,5% vergeleken met (3).

In de referenties 5 en 2 worden dergelijke expliciete resultaten verkregen voor zowel conservatieve als dissipatieve systemen. Daaruit blijkt dat de conservatieve δ en α in waarde verschillen van de besproken dissipatieve δ en α . Tevens blijkt dat *alle* dissipatieve systemen, ongeacht het aantal dynamische variabelen, *dezelfde* δ - en α -waarde (2), (3) hebben^[1, 5, 2]. Dit is een tweede reden voor de universaliteit van de Feigenbaum-constanten. Bij geringe dissipatie gaan de δ (2) en α (3) dus van de conservatieve waarde naar de dissipatieve waarde, naarmate we meer en meer bifurcaties in rekening brengen ('crossover')^[6, 1, 8].

Andere scenario's

We herinneren de lezer eraan dat we hier alleen de *overgang* naar chaos besproken hebben. In 'volledig ontwikkelde turbulentie', bij voorbeeld, ontstaan veel meer effecten, zoals 'intermittentie' en toevalsprocessen in de ruimte (zowel als in de tijd). Andere, theoretisch meer gecompliceerde, scenario's worden vermeld in de referenties 3, 4, 10 en 11. Voor sommige van

deze scenario's bestaan enkele experimentele aanwijzingen^[1-4]. Ofschoon periodeverdubbelingen alom aanwezig zijn in *conservatieve* systemen^[5, 2, 1], geloven we dat een ander scenario daar minstens even belangrijk is^[11, 10, 9, 2].

Hoewel dit artikel wellicht beter de huidige chaos in de niet-lineaire dynamica weergeeft dan die in de natuur, is het toch fascinerend te zien dat er voortgang geboekt wordt bij het aloude probleem om 'statistisch' gedrag te verklaren uit 'mechanische' bewegingsvergelijkingen.

Referenties

1. P. Cvitanovic', red. 'Universality in Chaos'. A Reprint Selection (42 artl.), Adam Hilger Publ., Bristol, 1984.
2. R.H.G. Helleman, Self-Generated Chaotic Behavior in Nonlinear Mechanics §, pp. 420-488, in: ref. 1 (1984), een herdruk, met toevoegingen en correcties van een artikel op pp. 165-233 in: 'Fundamental Problems in Statistical Mechanics'. Vol. 5, ed. E.G.D. Cohen, Noord Hollandse Uitg. Mij., Amsterdam, 1980.
3. D. Ruelle, Strange Attractors, pp. 37-48, in ref. 1, 1984.
4. J.-P. Eckmann, Roads to Turbulence in Dissipative Dynamical Systems, pp. 94-105, in ref. 1, 1984.
5. R.H.G. Helleman en R.S. MacKay, One Mechanism for the Onsets of Large-Scale Chaos in Conservative and Dissipative Systems, pp. 95-126, in: 'Long-Time Prediction in Dynamics'. Red. C. Horton, L. Reichl en V. Szebehely, John Wiley Publ., NY, 1983.
6. G.R.W. Quispel, Explicit Crossover Results for the Feigenbaum Constants, from Conservative to Dissipative Maps, (preprint). Wordt gepubliceerd, 1984; THT.
7. T.P. Valkering, The Construction of an Unstable Manifold for the Hénon Mapping. Verschijnt in J. Phys. A., 1984; THT.
8. Enkele 'Communications', gedurende de jaarlijkse 'Dynamics Days' Conferenties in de V.S. (januari) en in Nederland (juni).
9. J. Moser, Is the Solar System Stable? Neue Zürcher Zeitung, 14 mei 1975; herdrukt in: Math. Intelligencer, 1 (1978) 65-71.
10. M.V. Berry, Regular and Irregular Motion, pp. 16-120, in: 'Topics in Nonlinear Dynamics'. Red. S. Jorna, Am. Inst. Phys. Conf. Proc., Vol. 46, A.I.P., NY, 1978.
11. A.J. Lichtenberg en M.A. Lieberman, 'Regular and "Stochastic" Motion'. Springer Publ., Berlijn, 1983.